

向量优化为基础的图像空间迭代重建理论及实现

赵凌云, 汪元美

(浙江大学生物医学工程教育部重点实验室, 浙江杭州 310027)

摘 要: 本文研究了单准则及多准则迭代图像重建理论及计算机实现. 结果表明了多准则迭代图像重建在重建图像质量方面优于流行的单准则迭代重建方法, 显示了多准则法的优点.

关键词: 图像重建; 多准则优化

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2002)10-1547-02

Iterative Reconstruction Theory and Implementation of Images Based on Vector Optimization

ZHAO Ling yun, WANG Yuan mei

(Key Lab. on BME of Ministry of Education, Zhejiang university, Hangzhou, Zhejiang 310027, China)

Abstract: There are two main kinds of image reconstruction algorithm: Transform methods and Series expansion methods. Series expansion methods mainly include single criterion optimization using iterative methods that always optimize single property. Multi-criterion image reconstruction makes a new improvement by using mathematic method of multi objective optimization in Operation Research. Multi-criterion image reconstruction overcomes the defect of old algorithms that only emphasize single property of image, and gets satisfactory result by making it similar to original image in multi properties.

Key words: image reconstruction; multicriteria optimization

1 引言

图像重建算法有两大类, 一类是变换法, 另一类是级数展开法. 级数展开法主要是以单则优化迭代算法为主, 即对重建图像的单个性能指标进行优化. 汪元美等首次在国际引进多准则优化为基础的图像重建理论^[2,3]. 多准则图像重建运用了运筹学中多目标优化的数学方法, 使图像重建得到新的发展. 多准则图像重建克服了以往重建算法中偏重单个性能指标的不足, 使重建的图像在多个性能指标上与原始图像相一致, 产生较满意的结果. 这篇文章讨论的是新型多目标图像空间迭代重建及其实现. 汪元美等的以前论文是讨论多目标优化图像重建迭代过程, 而不是图像空间迭代形式.

本文分别讨论了几类单准则和多准则迭代重建算法. 然后在计算机上进行了算法模拟, 给出了实验结果以及各种性能指标的分析, 并进行了各种算法的比较.

2 成像方程

设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为被重建的图像向量. 设 A 为 $M \times N$ 维投影矩阵, 其 (k, l) 元素 a_{kl} 表示第 l 个像素对第 k 根射线投影的贡献, 意即第 k 根射线与第 l 个方形像素交线的长度. 则由投影重建图像问题为如下方程描述:

$$Y = AX \quad (1)$$

式中 Y 为已知 M 投影数据. 成像是如何由已知投影数据 Y 求出重建成的图像 X . 由于 A 仅 5% 约元素非零, 因而是大而稀疏的矩阵, 因而式(1)求解为高度病态问题.

3 单准则迭代重建

Heman 等^[1]发明的 ART 方法是把式(1)写成如下向量形

式:

$$\langle a^i, X \rangle = y_i, \quad 1 \leq i \leq M \quad (2)$$

$$\text{式中 } a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iM})^T, \langle a^i, X \rangle = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j.$$

ART 法可由如下迭代过程来做:

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} + \alpha_k \frac{y_i - \langle a^i, X^{(k-1)} \rangle}{\|a^i\|^2} a^i \quad (3)$$

式中 α_k 为松弛参数, 且 $\varepsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 为很小正实数. 当 $\alpha_k = 1$, 对于所有 k , 上述方法可证明为 Kaczmarz^[1] 经典迭代法.

ART 法另一变种叫联合迭代重建方法(SIRT), 亦即可以描述成如下迭代过程:

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} + \alpha_k \sum_{i=1}^M \frac{y_i - \langle a^i, X^{(k-1)} \rangle}{\|a^i\|^2} a^i \quad (4)$$

即每一步迭代中, 考虑全部方程. 此法基本上是 Cimmino^[1] 经典迭代方法. 此法也可证明为最小二乘最小范数解^[1].

4 多准则迭代重建(MIRT)

多准则图像重建是考虑图像场多方面的性能指标优化下的成像理论. 这里选用的第一个准则函数是图像场峰值性函数, 也叫能量函数. 它可用图像向量的平方范数来刻画. 可由

$$f_1(X) = \frac{1}{2} v_1 X^T X \quad (5)$$

式中, v_1 为归一化系数. X 为 N 维图像向量, 上标 T 为转置.

选用的第二个准则函数是投影与再投影之间的平方误差, 亦即

$$f_2 = \frac{1}{2} v_2 (Y - AX)^T (Y - AX) \quad (6)$$

式中, v_2 为归一化系数. AX 为再投影数据, A 为 $M \times N$ 阶投影矩阵.

我们考虑在图像场的峰值性及平方误差同时极小化下的成像问题, 亦即

$$\min_{X \in X} (f_1(X), f_2(X)) \quad (7)$$

式中, 可行区域 X 定义为:

$$X \triangleq \{X \in R^N \mid AX = Y, X \geq 0\} \quad (8)$$

解上述向量优化问题式(7)可由加权标量化评价函数来描述, 亦即

$$\min_{X \in X} (f(X)) = \sum_{i=1}^2 w f_i(X) \quad (9)$$

式中加权系数 w_i 对应于目标函数 $f_i(X)$ 的相对重要性. 且

$$W \triangleq \{w_i \geq 0, i = 1, 2, \sum_i w_i = 1\} \quad (10)$$

加权系数的选择可参阅文献[2, 3].

当加权系数 w_i 一旦确定, 我们的多准则重建问题等价于如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{X \in X} (f) &= \sum_{i=0}^2 w f_i(X) \quad (11) \\ \text{s. t.} \quad Y - AX &= 0 \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

这是一个典型的数学规划问题, 可由 Lagrange 乘子法来求解, 亦即

$$\begin{aligned} L(X, U, \lambda) &= \frac{1}{2} w_1 v_1 X^T X + \frac{1}{2} w_2 v_2 (Y - AX)^T (Y - AX) \\ &+ U^T (Y - AX) + \lambda^T X \quad (12) \end{aligned}$$

式中, λ 为 N 维乘子向量, U 为 M 维乘子向量.

$L(\otimes)$ 对向量 X 的偏导数可得

$$\frac{\partial L(\otimes)}{\partial X} = w_1 v_1 X + w_2 v_2 A^T (Y - AX) - UA^T + \lambda \quad (13)$$

亦即 $(w_1 v_1 I + w_2 v_2 A^T A) X = w_2 v_2 A^T Y + UA^T - \lambda$.

式中 I 为 $N \times N$ 阶单位方阵. 因 $(w_1 v_1 I + w_2 v_2 A^T A)$ 非奇异, 其逆存在, 且 $X > 0, \lambda = 0$. 于是

$$X = (w_1 v_1 I + w_2 v_2 A^T A)^{-1} (w_2 v_2 A^T Y + UA^T) \quad (14)$$

可以转化成如下多准则迭代重建公式:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} \frac{w_2 v_2 \sum_{i=1}^M a_{ij} y_i + \sum_{i=1}^M u_i a_{ij}}{w_1 v_1 x_j^{(k)} + w_2 v_2 \sum_{i=1}^M a_{ij} \sum_{l=1}^N a_{il} x_l^{(k)}} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

遵照数学规划理论^[4], 可以对乘子参量 u_k 作如下调节:

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \left(y_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$i = 1, 2, \dots, M$

5 模拟结果

我们采用国际通用的 Huffman 脑截面模型作为检验算法优劣的标准. 我们采用 128×128 数字化图片(图1)作为原始图像, 在 128 个角度(覆盖 180° 角度范围)下取投影数据, 每个角度取 128 根射线. 利用平行投影模



图1 标准 Huffman 模型

式获得完全投影数据集. 对标准的平行束数据由单准则 ART、SIRT 算法及双准则迭代算法算出的结果如图 2(a)、(b)、(c) 所示. 重建图像和图 1 的标准测试模型之间的三个误差测度 d, r, e 作为重建质量好坏的标准, 如下表示出. 迭代次数及时间也由表 1 给出. 我们的实验是在 PIII(450MHz)-PC 机上进行.

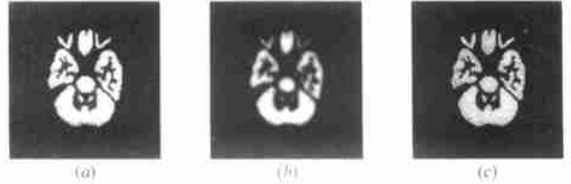


图2 算法比较结果. (a) ART; (b) SIRT; (c) MIRT

从重建图像的误差比较可以得出, 双准则迭代重建优于常规单准则 ART 及 SIRT 算法. 可以断言, 我们的方法对于图像重建将产生重要的影响.

表1 重建误差及时间比较

重建算法	迭代次数	d	r	e	时间(秒)
ART	50	0.117002	0.17446	81.28172	30.731
SIRT	50	0.287005	0.248375	156.648087	31.125
MIRT	50	0.087959	0.065084	72.48425	58.754

参考文献:

- [1] G T Heman. Image Reconstruction from Projections [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [2] Wang Yuanmei, Lu Weixue. Multicriterion Image Reconstruction and Implementaion [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1989, 46(2): 131- 135.
- [3] Wang Yuanmei, Lu Weixue. Multiobjective Decision Making Approach to Image Reconstruction from Projections [J]. Journal of the Optical Society of America, A. Optics and Image Science, 1991, 8(10): 1649- 1656.
- [4] R Fletcher. Practical Methods of Optimization [M]. New York: John Wiley & Sons, 1981.

作者简介:



赵凌云 男, 1969 年 10 月出生于江西九江, 现为浙江大学生物医学工程系博士生, 从事医学成像理论方面的研究.



汪元美 男, 1945 年 10 月出生于江西乐平, 博士, 博士生导师, 研究方向: 信息论、图像与信号处理、医学成像理论及神经网络.